

INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

<http://www.iheb.org/>

Concours Général de Physique “Minko Balkanski”

11 May 2013

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на трите задачи съответно на френски и английски език. Част трета съдържа фигурите използвани за онагледяване на въпросите и помощни таблици и формули. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници. Ако желаете, можете да ползвате калкулатори.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат *яснотата и стилът* на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и *кратки*. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. *Пишете само на езика, който сте избрали* (френски или английски).

Задачите не дават еднакъв брой точки.

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете *без да повдигате въпроси към квесторите*.

Решенията ще бъдат изложени на сайта на Фондация Миню Балкански в деня на състезанието. Класирането ще бъде изложено също там месец по-късно. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към krastanov.stefan@gmail.com. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Бъдете сигурни да попълните правилно информацията за контакт.

Разполагате с 4 часа. Успех!

Première partie

Français

1 Au sujet des poutres

Les poutres sont omniprésentes dans la construction. On va s'intéresser à certaines de leurs propriétés statiques.

1.1 La poutre

Ne considérons que des poutres solides rectangulaires comme dans fig 1a. Les côtes L et b sont beaucoup plus grands que le côté e et le problème est considéré invariant dans la direction y . La ligne neutre (en pointilles) est considérée de longueur constante. On note E le module de Young. Les autres notations suivent la figure avec T , N et M les forces tangente et normale et le moment des forces *appliquées par le côté droit sur le côté gauche*. On va essayer de retrouver le profil de la poutre en fonction des paramètres. Notons le déplacement selon z comme $\xi(x)$ - une fonction de x , et supposons $\xi \ll L$. Considérons dans les questions suivantes un petit segment de longueur dx et rayon de courbure R (c.f. fig 1b).

1. Quelle est la relation entre $R(x)$ et $\xi(x)$ dans l'approximation des petits déplacements (dans ce cas R ne dépend que de ξ'') ?
2. En considérant une petite segment (fig 1b) calculer $dF(z)$ la force exercée sur un petit surface du segment (rectangle des côtes dz et b) par le reste du système.
3. Calculer la force totale F exercée sur la surface droite du segment (la somme de dF sur $z \in [-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}]$).
4. Calculer le moment des forces total M_F exercé sur la surface droite du segment.
5. Donner $N(x)$ et démontrer que $M(x) = -\frac{be^3E}{12R}$.
6. Le calcul de la force totale sur le petit segment nous permet de trouver $\frac{dT}{dx}$. Trouver le.
7. Le calcul du moment des forces total sur le petit segment nous permet de trouver une relation entre $M(x)$ et $T(x)$. Quelle est cette relation ?
8. Montrer que $\frac{d^4\xi}{dx^4} = 0$.

1.2 Force tangentielle sur l'extrémité

1.2.1 Le problème

On applique une force tangentielle R sur l'extrémité droite de la poutre. L'extrémité gauche est fixée (et immobilisée) alors $\xi(0)$ et $\xi'(0)$ sont égales à zéro.

1. Comment doit-on fixer la poutre pour n'avoir que $\xi(0) = 0$?
2. Donner $\xi(x)$ dans ce cas (On peut démontrer que la forme générale est $\xi(x) = Ax^2 + Bx^3$).

1.2.2 Application - microscope à force atomique

Le microscope à force atomique mesure la force entre une très petite sonde et les atomes dans l'échantillon à observer. Une modèle simple de la sonde est une poutre. La force interatomique R est appliquée sur l'extrémité. L'autre extrémité est fixée. La force est mesurée à partir du déplacement δ de la pointe.

1. Donner l'expression pour δ .
2. Les déplacements sont très petits. Proposer une méthode générale (dans une phrase) pour les mesurer.

1.2.3 Application - mesure de la tension superficielle entre deux solides

Considérons une poutre comme dans fig 2. Elle est collée à la surface grâce à la tension superficielle.¹ La méthodologie suivante était utilisée pour la première mesure de tension superficielle entre solides.

1. Calculer l'énergie élastique dans une poutre de longueur h_1 fixée à une extrémité quand l'autre extrémité est déviée à une distance δ .
2. Trouver σ pour que la poutre de longueur L soit en équilibre pour une déviation δ et une longueur de contact h_2 .
3. Bonus : Retrouver le résultat en fixant la force dans le cas équivalent :
 - (a) Calculer l'énergie élastique dans une poutre de longueur h_1 fixée à une extrémité et subissant une force R à l'autre extrémité.
 - (b) Trouver σ pour que la poutre de longueur L soit en équilibre pour une force R et une longueur de contact h_2 .

2 Capacité thermique négative et la stabilité des étoiles

Quand la température des étoiles s'élève (par exemple par une perturbation aléatoire), le taux des réactions nucléaires, et donc la production d'énergie, augmente. En vue de ce phénomène la stabilité des étoiles est très intéressante. Dans ce problème nous allons essayer de résoudre cet ambiguïté.

2.1 Effondrement gravitationnel

Les nuages de gaz et de poussière interstellaires sont instables et s'effondrent sous leur propre poids gravitationnel (le même phénomène se reproduit à plus grande échelle pour les galaxies). Dans ce problème nous allons étudier un nuage sphérique d'une densité uniforme ρ et rayon R . Les particules à l'intérieur du nuage sont assimilées à des points matériels qui interagissent seulement par des forces gravitationnelles. Leur masse molaire est notée μ .

2.1.1 Particules initialement immobiles

Dans cette partie, les particules sont considérées immobiles à l'instant initial.

1. Quelle est l'énergie gravitationnelle du nuages E_{gr} à $t = 0$?
2. En combien de temps τ_{gr} les particules vont s'effondrer en un seul point ?
3. Faites une application numérique dans le cas du Soleil ($M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30}\text{kg}$ et $R_{\odot} = 7.0 \times 10^8\text{m}$) et puis pour un nuage intergalactique (rayon $10^8 R_{\odot}$ et 10 atomes d'hydrogène par centimètre cube)
4. Quelle force, que nous n'avons pas prise en compte pour l'instant, peut arrêter cet effondrement ?

2.1.2 Théorème du viriel

Supposons que la température à l'instant initial du nuage est T .

1. Quelle est l'énergie cinétique totale E_{cin} des particules dans le nuage ?
2. On peut démontrer que l'effondrement se produit pour $E_{gr} + 2E_{cin} < 0$. Donner le rayon critique R_c , pour lequel le nuage est instable (pour un rayon initial de $R > R_c$).

1. Pour une tension superficielle σ entre deux surfaces l'énergie de cohésion est σS avec S - l'aire commune.

2.1.3 Acoustique

1. En faisant une analyse dimensionnelle, donner la vitesse du son c_s dans le nuage de gaz. Utiliser la pour exprimer le temps caractéristique du propagation du son dans le nuage $\tau_s = \frac{R}{c_s}$.
2. Donner le rayon critique R_s tel que $\tau_s > \tau_g$ pour $R > R_s$. Qu'est ce que nous pouvons conclure si nous comparons R_s et R_c ?

2.2 Stabilité

Dans cette partie nous allons à nouveau considérer une étoile à symétrie radiale de masse M et rayon R . La densité volumique en fonction de la distance jusqu'au centre sera notée $\rho(r)$, la température $T(r)$ et la masse contenue dans une sphère de rayon r - $m(r)$. Les gaz est considéré comme idéal avec une masse molaire μ .

1. Exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle E_{gr} en fonction des donnée de l'énoncé.
2. Trouver le gradient de pression $\frac{dp}{dr}$ et prouver que $E_{gr} = -3 \int_{r=0}^{r=R} p dV$ (dV étant le volume élémentaire d'une couche sphérique d'épaisseur dr)
3. Donner l'expression de l'énergie interne molaire U_{mol} du gaz en fonction de C_v (capacité thermique à volume constant) et T . Quelle est la formule qui lie C_v , γ et R_g ?
4. Donner la valeur de l'énergie interne thermique du gaz U .
5. Quelle est l'énergie totale E_{tot} du l'étoile en fonction de U ? Que devient cette expression pour $\gamma = \frac{5}{3}$? Cette valeur du γ correspond à quel type de gaz ? Quelle est la nature de l'énergie U dans ce cas là ?
6. Sachant qu'une petite perturbation positive de la température T va créer une augmentation du taux des réactions nucléaires (et donc augmentation de l'énergie thermique du l'étoile), comment est-il possible que l'étoile reste stable ?

3 La thèse étendue de Church-Turing et les bulles de savons

Dans le paragraphe qui suit nous allons utiliser des exemples simples dans lesquels les explications et les réponses fournies seront purement qualitative et "à la main". L'objectif étant de découvrir la théorie physique derrière les questions posées ci-dessous.

La théorie de la complexité est un domaine des mathématiques, et plus précisément de l'informatique théorique, qui étudie formellement la quantité de ressources (en temps et en espace) nécessaire pour la résolution de problèmes au moyen de l'exécution d'un algorithme. Il s'agit donc d'étudier la difficulté intrinsèque de problèmes posés mathématiquement. Dans ce domaine nous pouvons définir des problèmes "faciles" et "difficiles" (au respect d'une structure similaire aux ordinateur actuels). Un exemple de problème "facile" est la multiplication, qui peut être effectuer quasi instantanément. Un exemple de problème "difficile" est de trouver le chemin le plus court entre des villes. Les meilleurs algorithmes actuelles croissent exponentiellement avec le nombre de villes [Munroe(2009)].

La thèse étendue de Church-Turing et ses corollaires font le lien entre la théorie de la complexité et la réalité physique. Ils prouvent un nouveau principe fondamental similaire à la conservation de l'énergie, la vitesse de la lumière, le premier et le deuxième principe de la thermodynamique etc [Aaronson(2011a)]. La thèse postule qu'aucun ordinateur ne peut être construit pour résoudre des problèmes "difficiles" de manière "efficace". Dans cet exercice nous n'aurons pas le temps pour exposer complètement ces idées mais vous pouvez consulter la vidéo par [Aaronson(2011b)].

3.1 Le problème "difficile" est ces solutions

Nous allons nous intéresser à un problème algorithmique considéré comme "difficile", notamment la construction d'un arbre de Steiner. L'énoncé du problème est : "Proposer un algorithme (ou dans

notre cas un dispositif physique) qui nous donne en sortie l'ensemble des segments les plus courts qui lient un nombre quelconque de points" (cf. fig. 3) Nous allons créer un algorithme pour trouver une solution efficace (en refusant la thèse de Church-Turing) et ensuite nous allons essayer de comprendre pourquoi notre raisonnement est faussé.

Ceci est un problème de minimisation et en physique un grand nombre de systèmes évoluent en cherchant le minimum d'un état.

3.1.1 Recherche d'un minima d'énergie

1. Pourquoi le minimum de l'énergie potentielle d'un système nous donne son état d'équilibre? Pour répondre à cette question vous pouvez vous demander :
 - (a) Qu'est-ce qu'il signifie un équilibre?
 - (b) Comment évoluent l'énergie potentielle et cinétique pour des état loin de leur équilibre?
 - (c) Quel est le rôle de la dissipation d'énergie et le frottement?
2. Considérons un bâton de dynamite. Les débris d'explosion du dynamite sont dans un état énergétique plus bas que dans le bâton (c'est de la que l'énergie destructive vient) pourquoi la proposition suivante est fausse : "L'état qui représente une énergie plus basse est celui d'équilibre, donc un bâton de dynamite ne peut pas exister, car il n'est pas dans son état d'énergie minimale (il va exploser à l'instant qu'il est créé)". Dans votre réponse vous pouvez vous servir d'un schéma pour illustrer votre raisonnement.

3.1.2 Recherche d'un minimum de distance

Pour résoudre le problème de l'arbre de Steiner nous avons besoin d'un système qui par le billet de recherche d'un minimum de l'énergie, va trouver un minimum des distances. L'exemple que nous allons utiliser pour répondre à cette question sera une membrane savonneuse.

1. Si nous admettons que le bord de la membrane exerce une force par unité de longueur $\frac{dF}{dl} = \sigma$ (σ dépend de la nature et la composition de la membrane), trouver l'énergie par unité de longueur que nous devons fournir pour créer cette membrane.
2. Proposer un dispositif physique qui résout le problème de Steiner (au moins pour un certain nombre de configuration/points)

3.2 La question fondamentale

Pourquoi notre dispositif n'est pas applicable en règle générale? En prenant en compte votre réponse à la 3.1.1, qu'est-ce qu'il peut empêcher l'utilisation/ le fonctionnement de notre appareil physique?

Part II

English

1 On The Subject of Beams

Beams are important elements of many engineering structures. We will look at some of their properties at static equilibrium.

1.1 The Beam

We will consider only solid rectangular beams as shown in fig 1a. The L and b sides are much longer than the e side and the whole problem is considered invariant along the y direction. The neutral line (drawn dashed) is considered to be of constant length. The Young modulus is denoted as E . The rest of the notation follows the figure with T , N and M being respectively the tangent and normal forces and the torque *exerted by the right side on the left side*. We will try to find the form of the beam as a function of these parameters. The displacement along z is denoted $\xi(x)$ (a function of x) and it is assumed to be much lower than L , i.e. $\xi \ll L$. In the following questions we will consider a small segment of length dx and radius of curvature R (see fig 1b).

1. What is the dependence between $R(x)$ and $\xi(x)$ in the approximation of small displacements (in this case R depends only on ξ'')?
2. By considering only a small segment (fig 1b) compute $dF(z)$ the force exerted on a small part of the segment (rectangle of sides dz and b) by the rest of the system.
3. Compute the total force F exerted on the right surface of the segment (the sum of dF over $z \in [-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}]$).
4. Compute the total torque M_F exerted on the right surface of the segment.
5. Find $N(x)$ and show that $M(x) = -\frac{be^3E}{12R}$.
6. Finding the total force on the small segment permits us to calculate $\frac{dT}{dx}$. Calculate it.
7. Finding the total torque on the small segment permits us to calculate a dependence between $M(x)$ et $T(x)$. What is this dependence?
8. Prove that $\frac{d^4\xi}{dx^4} = 0$.

1.2 Tangent Force at the End of the Beam

1.2.1 The Setup

We apply a tangent force R on the right end of the beam. The left end is fixed (and immobilized) such that $\xi(0)$ and $\xi'(0)$ are equal to zero.

1. How would we have fixed the beam if we wanted to have only $\xi(0) = 0$?
2. Give $\xi(x)$ in our case (One can prove that the general form is $\xi(x) = Ax^2 + Bx^3$).

1.2.2 Application - Atomic Force Microscope

The Atomic Force Microscope measures the force between a very small probe and the atoms in the specimen under observation. A simple model of the probe is a small beam. The atomic force R is applied at the end of the beam, while the other end is fixed in place. The force is measured through the deviation δ at the end of the beam.

1. Give the expression for δ .
2. The displacements are very small. Propose a general method (in one phrase) that can be used for measuring them.

1.2.3 Application - Measuring the Surface Tension Between Two Solids

Consider a beam set as in fig 2. It is glued to the surface thanks to the surface tension.² The following methodology was used for the first measurement of surface tension between solids.

1. Calculate the elastic energy stored in a beam of length h_1 that is fixed in place at one end while the other is displaced at a distance δ .
2. Find σ such that the beam of length L is at equilibrium for a displacement δ and a contact length h_2 .
3. Bonus: Find the result again but now by fixing the force:
 - (a) Compute the elastic energy stored in a beam of length h_1 fixed in place at one end while being subjected to a force R at the other end.
 - (b) Find σ such that the beam of length L is at equilibrium for a force R and contact length h_2 .

2 Negative Heat Capacity and The Stability of Stars

When the temperature of a star gets higher (for instance due to some random perturbation), the rate of nuclear reactions increases, hence outputting more energy. In light of this fact the stability of the stars is puzzling. In this problem we will explain how this is possible. The problem is based on exam given at École Polytechnique in 2009.

2.1 Gravitational Collapse

Gas clouds form into stars because gravitationally interacting clouds are instable and collapse (the same can be said on a bigger scale for how galaxies form). We will consider a spherical cloud initially of uniform density ρ and radius R . The particles forming the cloud are point masses that interact only through gravitational forces. Their molar mass is μ .

2.1.1 Initially at Rest

Consider all the particles to be initially at rest.

1. What is the initial gravitational energy E_{gr} of the cloud?
2. How much is τ_{gr} the time needed for the all particles to collapse in one point?
3. Evaluate for $M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30}\text{kg}$ and $R_{\odot} = 7.0 \times 10^8\text{m}$ corresponding to our sun. Evaluate for an intergalactic cloud of size $10^8 R_{\odot}$ and 10 hydrogen atoms per cm^3 .
4. What force, not taken into account here, could stop the collapse?

2.1.2 Virial Theorem

Now we consider the cloud to be at initial temperature T .

1. What is the initial total kinetic energy E_{cin} of the particles in the cloud?
2. If $E_{gr} + 2E_{cin} < 0$ we can show that a collapse starts. Find the critical radius R_c such that the cloud is instable for initial radius $R > R_c$.

2. For a surface tension σ between two surfaces the energy of cohesion is σS where S is the common area.

2.1.3 Acoustics

1. Through dimensional analysis give the speed of sound c_s in the gas cloud. Use it to express $\tau_s = \frac{R}{c_s}$ the characteristic time for a sound wave to propagate through the cloud.
2. Give the critical radius R_s such that for $R > R_s$ we have $\tau_s > \tau_g$. What can one conclude from the comparison of R_s and R_c ?

2.2 Stability

We will consider a radially symmetric star of mass M and radius R . The density as a function of the distance to the center will be denoted as $\rho(r)$, the temperature as $T(r)$, the mass within a sphere of radius r is $m(r)$. The gas will be considered to be an ideal gas of molar mass μ .

1. Express the gravitational potential energy E_{gr} .
2. Express the gradient of the pressure $\frac{dp}{dr}$ and prove that $E_{gr} = -3 \int_{r=0}^R p dV$ (where dV is the volume of a spherical shell of thickness dr).
3. Express the internal energy of an ideal gas per mol U_{mol} in terms of C_v (molar heat capacity at constant volume) and T . Express C_v in terms of γ and R_g .
4. Find an expression for U the total internal thermal energy of the star.
5. Express the total energy E_{tot} of the star in terms of U . What is this relation for $\gamma = \frac{5}{3}$? To what type of gas does this correspond? What type of energy is U in this case?
6. Given that a small positive perturbation in T will cause increase in the rate of nuclear reactions (hence increase in the thermal energy dumped in the star) how is it possible that stars are stable?

3 The Extended Church-Turing Thesis and Soap Bubbles

Dear reader, beware for much hand-waving and "abuse of notation" is employed in the following introductory paragraph. Its purpose is to introduce the fascinating theory behind the simple questions that follow, however it is of no importance for their answers and you can skip it if you wish. Just remember: Do not overthink it and answer in no more than two short sentences.

There is a certain domain of mathematics called "Complexity Theory" that deals with how hard and time-consuming different algorithms are. Within this field one can define what are called "easy" and "hard" problems (with respect to a mathematical construct similar to actual PC computers). An example of an easy problem is multiplication that can be done almost instantly. An example of a hard problem is finding the optimal path for a journey between cities. The best known algorithms for finding such path grows exponentially with respect to the number of cities considered [Munroe(2009)].

The Extended Church-Turing Thesis and its corollaries link Complexity Theory to the physical reality. They provide a new fundamental principle similar to conservation of energy or the speed limit of light or the second law of thermodynamics [Aaronson(2011a)]. It states that no computer can be build that solves "hard" problems "efficiently". We will not dwell on the definitions of "hard" and "efficient", nor will we have the time to show some of the fascinating insights that can be obtained from this principle. For a nice video lecture at layman level see [Aaronson(2011b)].

3.1 The "Hard" Problem and Its Solution

We will consider one problem that is considered algorithmically "hard", namely the construction of a Steiner tree. The problem is as follows: *"Propose an algorithm (or in our case a physical contraption) that given any number of points in a plane will produce the shortest set of segments connecting the points"* (see fig. 3). We will try to create an efficient way to solve this hard problem (therefore disproving the Extended Church-Turing Thesis) and then we will try to understand why our attempt actually fails.

This is a problem of minimization and in physics certain systems usually evolve minimizing certain quantities.

3.1.1 Minimization of Energy

1. Why minimizing the potential energy of a system gives us the state of equilibrium? In order to answer this, consider
 - (a) What does equilibrium mean?
 - (b) How do potential and kinetic energy evolve while far from equilibrium?
 - (c) What is the role of dissipation and friction?
2. Consider a stick of TNT and the following argument. The exploded remains of the TNT is a lower energy state of the system than the unexploded stick is (after all, this is where all the energy for the explosion comes from). What is wrong with the following conclusion: "The state of lower energy is the state of equilibrium, hence a stick of TNT can not exist because it is not in its lowest energy state (it will explode the instant it is created)."? Draw a nice plot.

3.1.2 Minimization of Length

To solve the Steiner tree problem we need a system that through its minimization of energy will actually minimize some measure of length. The usual example in this case is soap membranes.

1. Given that the border of a membrane exerts a force per unit length of $\frac{dF}{dl} = \sigma$ (where σ is a coefficient dependent on the composition of the membrane) derive a formula for the energy needed for the creation of a unit area of membrane.
2. Propose a contraption that solves the Steiner tree problem at least for some configuration/quantity of given points.

3.2 The Fundamental Issue

Why is our contraption not applicable in general? Considering your answers to 3.1.1 what can hamper the usability of our contraption?

Troisième partie

Annexe

1 Figures

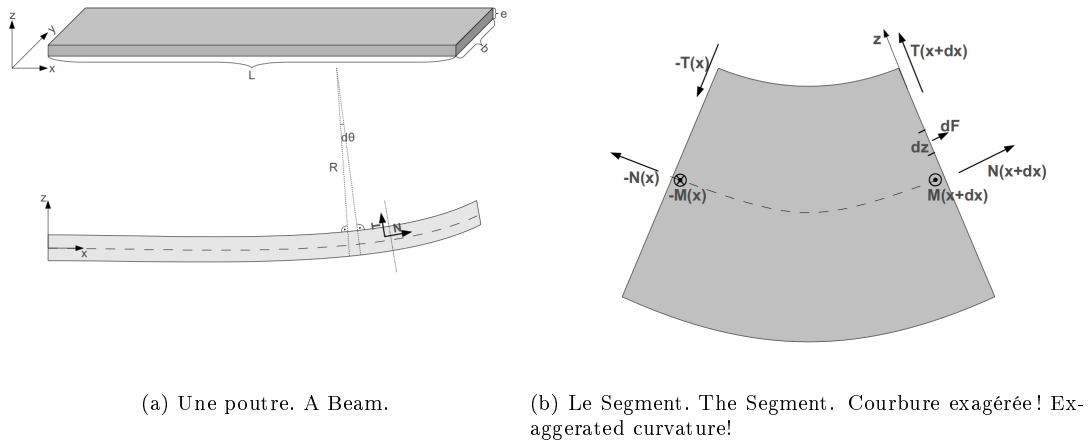


Figure 1:

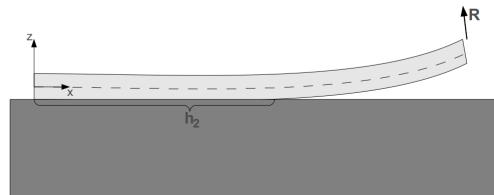


Figure 2: A glued beam

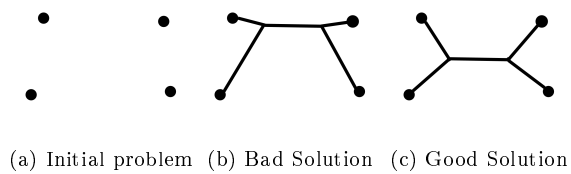


Figure 3: Steiner tree

2 Tables des formules

Séries : $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

Trigonométrie : $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$; $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$.

Intégrales : $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C$; $\int \exp(ax) dx = \frac{\exp(ax)}{a} + C$;
 $\int \sin(ax) = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$; $\int \cos(ax) = \frac{\sin(ax)}{a} + C$.
 $\int_a^b v du = [vu]_a^b - \int_a^b u dv$

Complexes : $i^2 = -1$; $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$; $\overline{(x + iy)} = (x - iy)$;
 $\|x + iy\| = \sqrt{(x + iy)(x + iy)} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Geométrie : $S_{sphere} = 4\pi R^2$, $V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thermodynamique : premier principe $dU = dQ - pdV$; entropie $dS = \frac{dQ}{T}$; gas parfait $pV = nR_g T$;
coefficient de Laplace $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$; constante d'Avogadro : $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$.

Gravitation : constante de Newton $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$; force $F = G \frac{M_1 M_2}{r^2}$; energie $E = -G \frac{M_1 M_2}{r}$.

Elasticité : module de Young $F = -\frac{\Delta L}{L} ES$

Références

- [Aaronson(2011a)] S. Aaronson. Why philosophers should care about computational complexity. *arXiv preprint arXiv:1108.1791*, 2011a.
[Aaronson(2011b)] Scott Aaronson. Quantum computing and the limits of the efficiently computable - 2011 buhl lecture, 2011b. URL <http://youtu.be/8bLXHvH9s1A>.
[Munroe(2009)] Randall Munroe. Travelling salesman problem, 2009. URL <http://xkcd.com/399/>.